Propositions et questions diverses ; par M. E. CATALAN.

(Séance du 18 avril 1888.)

1. *Sur les fonctions X_n.* — Dans mon premier Mémoire sur cette théorie, j'ai démontré la formule

$$(1)\quad X_n = \text{partie réelle de } \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi(x\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n d\varphi.$$

Tout récemment, je me suis aperçu qu'on peut la remplacer par celle-ci :

$$(2)\qquad X_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^n\varphi(x\sin\varphi+\sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi,$$

laquelle n'est soumise à aucune restriction.

Cette formule (2), beaucoup plus simple que la célèbre formule de Jacobi

$$(3)\qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\sqrt{x^2-1}\sin\omega)^n d\omega,$$

est-elle *nouvelle?* Je m'adresse pour le savoir à mes confrères de la *Société mathématique.*

2. De la formule (2), on déduit, presque sans calcul, divers résultats, plus ou moins importants, que l'on trouvera dans mon *sixième* (et dernier) *Mémoire sur les fonctions X_n*, imprimé parmi ceux de l'Académie de Belgique.

3. *Quelques théorèmes empiriques.* — Le journal *Mathesis* a publié, en décembre dernier, une Question proposée par M. *Oltramare.* Cette question m'a fait songer au *théorème empirique* suivant :

n étant un nombre entier, soit n_1 la somme des diviseurs de n, inférieurs à n, soit n_2 la somme des diviseurs de n_1, inférieurs à n_1; etc. Cela posé : les nombres n, n_1, n_2, ... tendent vers une limite λ, laquelle est 1 ou un nombre parfait.

Si cette proposition (vérifiée sur divers exemples) est vraie, elle doit être fort difficile à démontrer.

Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, j'ai énoncé divers théorèmes empiriques; celui-ci, par exemple :

n étant un nombre entier, la quantité

$$6n^2+6n-3$$

est la somme de trois carrés, entiers et positifs (1).

(1) Dans le Mémoire intitulé : *Recherche sur quelques produits indéfinis*, j'ai donné, au moyen des séries elliptiques, ce théorème remarquable :

Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs.

Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver une démonstration élémentaire.